

การศึกษาข้อผิดพลาดในการทำโจทย์คณิตศาสตร์หัวข้อกฎลูกโซ่

ของนักศึกษาคณะวิทยาการและเทคโนโลยีสารสนเทศ

Common Mistakes in Solving Mathematical Problems by Chain Rule of Students in Faculty of Information Science and Technology

อ.กานต์จิตา วิจันทร์โต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร

karntita@mut.ac.th

Abstract

The aims of the study were to evaluate the students' achievement in solving mathematical problems by Chain Rule, investigate the students' mistakes, compare the achievement of the students in Information Technology Program and Multimedia and Animation Technology Program, and provide suggestions for further improvement of the teaching of the topic. Students' work on Chain Rule test items were studied. These items were part of the semester 1/2009 MATH0100 Mathematics I (Lec) mid-term examination paper. The sample was a group of 110 students in Information Technology Program and 50 students in Multimedia and Animation Technology Program in Faculty of Information Science and Technology who took the examination.

It was found that the achievement of the students was low. They appeared to have insufficient background on functions which caused the majority of them to use methods other than the Chain Rule. For those who used the Chain Rule but got the wrong answer, some were due to their inability to find the correct derivatives and some were due to their inability to properly write the mathematical forms of the answers. The students in two programs did not differ significantly in their achievement.

Keywords : mistakes in differential, Chain Rule

บทคัดย่อ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อประเมินผลสัมฤทธิ์ของนักศึกษาที่ลงทะเบียนเรียนวิชา MATH0100 Mathematics I ภาควิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ 1/2552 ในการทำโจทย์คณิตศาสตร์หัวข้อกฎลูกโซ่ ศึกษาปัญหาและข้อผิดพลาดในการทำโจทย์ เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ของนักศึกษาในสาขาเทคโนโลยีสารสนเทศและสาขาเทคโนโลยีมัลติมีเดียและแอนิเมชัน และเป็นแนวทางในการปรับปรุงการสอน เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาคือข้อสอบกลางภาคการศึกษา 1/2552 หัวข้อกฎลูกโซ่ กลุ่มตัวอย่างคือนักศึกษาคณะวิทยาการและเทคโนโลยีสารสนเทศ ที่เข้าสอบจำนวน 160 คน แบ่งเป็นสาขาเทคโนโลยีสารสนเทศจำนวน 110 คนและสาขาเทคโนโลยีมัลติมีเดียและแอนิเมชันจำนวน 50 คน

ผลการศึกษาพบว่าผลสัมฤทธิ์ของนักศึกษาก่อนข้างต่ำ นักศึกษามีปัญหาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชัน จึงทำให้นักศึกษาส่วนใหญ่ไม่ใช้กฎลูกโซ่ในการหาคำตอบ สำหรับนักศึกษาที่ใช้กฎลูกโซ่แต่ได้คำตอบผิด พบว่าไม่สามารถหาอนุพันธ์ในแต่ละขั้นตอนได้ หรือหาได้ก็จัดรูปคำตอบผิด สำหรับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในหัวข้อกฎลูกโซ่ของนักศึกษาใน 2 สาขาวิชาพบว่ามีแตกต่างกัน

คำสำคัญ ข้อผิดพลาดในการหาอนุพันธ์, กฎลูกโซ่

1. ที่มาและความสำคัญของปัญหา

อนุพันธ์ (derivatives) เป็นเนื้อหาสำคัญของแคลคูลัส การทำโจทย์ที่เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ได้ถูกต้องจำเป็นต้องมีความรู้ความเข้าใจเรื่องฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ รวมทั้งความรู้และความสามารถในการใช้กฎลูกโซ่ (Chain Rule) และการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่ยังเป็นพื้นฐานของเทคนิคการหาปริพันธ์โดยวิธีแทนค่าด้วย ในปัจจุบันแม้ว่าจะมีเครื่องคำนวณที่ช่วยในการหาอนุพันธ์แต่ยังมีความจำเป็นที่นักศึกษาจะต้องมีความรู้และความสามารถหาอนุพันธ์ด้วยตนเองให้ได้ในระดับหนึ่ง เพื่อประโยชน์ในการศึกษาเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ และงานวิจัยหรือนวัตกรรมใหม่ ๆ ในหลายสาขา

เนื่องจากการนำเนื้อหากฎลูกโซ่ไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง การเรียนการสอนให้กับนักศึกษามีความรู้และสามารถหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่นับว่ามีความสำคัญ จากการศึกษาข้อผิดพลาดในการทำโจทย์คณิตศาสตร์หัวข้อกฎลูกโซ่ วิชา MATH0110 Mathematics I (Lec) นักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์ ของ รศ.ดร.ภัทรกุล จริยวิธานนท์ พบว่านักศึกษส่วนใหญ่ยังผิดพลาดในการทำโจทย์ที่เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่ ทำให้การศึกษารังนี้ต้องการศึกษาว่า วิชา MATH0100 Mathematics I (Lec) นักศึกษาคณะวิทยาการและเทคโนโลยีสารสนเทศ จะสามารถทำโจทย์ประเภทนี้ได้มากน้อยเพียงใด นักศึกษามีความรู้หรือไม่ว่าโจทย์ข้อใดต้องใช้กฎลูกโซ่ นักศึกษานำกฎลูกโซ่มาใช้ได้ถูกต้องหรือไม่ ทั้งนี้เพื่อให้ได้แนวทางในการปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอนต่อไป

2. วัตถุประสงค์

- 2.1 เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ของนักศึกษาในการทำโจทย์คณิตศาสตร์ หัวข้อกฎลูกโซ่
- 2.2 เพื่อศึกษาปัญหาและข้อผิดพลาดในการทำโจทย์คณิตศาสตร์ หัวข้อกฎลูกโซ่
- 2.3 เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์หัวข้อกฎลูกโซ่ของนักศึกษาในแต่ละสาขาวิชา
- 2.4 เพื่อให้ข้อเสนอแนะในการพัฒนาหรือปรับปรุงการเรียนการสอนหัวข้อกฎลูกโซ่

3. ขอบเขตของการศึกษา

การศึกษารังนี้ศึกษากับนักศึกษาคณะวิทยาการและเทคโนโลยีสารสนเทศ ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร ที่เข้าสอบกลางภาคการศึกษา 1/2552 วิชา MATH0100 Mathematics I (Lec) จำนวน 160 คน และใช้ผลการสอบเฉพาะข้อที่วัดความรู้ความสามารถหัวข้อกฎลูกโซ่เป็นเครื่องมือในการศึกษา

4. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

การศึกษานี้จะทำให้ทราบระดับผลสัมฤทธิ์ของผู้เรียนในหัวข้อกฎลูกโซ่ ตลอดจนปัญหาของผู้เรียนที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์อันจะมีประโยชน์มากต่อการพัฒนาหรือปรับปรุงการเรียนการสอนหัวข้อนี้ต่อไป

5. วิธีการศึกษา

5.1 เครื่องมือ

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา คือ ข้อสอบกลางภาคการศึกษา 1/2552 วิชา MATH0100 Mathematics I (Lec) โดยศึกษาผลการทำข้อสอบอัตนัยที่วัดความรู้ในการใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ โดยในแต่ละข้อต้องหาอนุพันธ์สองตอน มีข้อสอบจำนวน 5 ข้อ คะแนนเต็ม 7.5 คะแนน ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 25 ของคะแนนเต็มทั้งฉบับ ข้อสอบประกอบด้วย

ข้อ 1. การหาอนุพันธ์ของรากของฟังก์ชันพหุนาม

$$y = \sqrt[3]{5x^4 - 4x^3 + 3x}$$

ข้อ 2. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

$$h(x) = \ln(3x^5 + 2x^3 + x)$$

ข้อ 3. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

$$y = e^{\cos x}$$

ข้อ 4. การหาอนุพันธ์ของกำลังของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$f(x) = 3 \sin^4 x$$

ข้อ 5. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$f(x) = \sin(3x^4)$$

5.2 กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง คือ นักศึกษาคณะวิทยาการและเทคโนโลยีสารสนเทศ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร ที่เข้าสอบกลางภาคการศึกษา 1/2552 วิชา MATH0100 Mathematics I (Lec) จำนวน 160 คน ในจำนวนนี้แบ่งเป็นนักศึกษสาขาเทคโนโลยีสารสนเทศจำนวน 110 คนและสาขาเทคโนโลยีมัลติมีเดียและแอนิเมชันจำนวน 50 คน

5.3 การวิเคราะห์ผล

5.3.1 การหาร้อยละเพื่อศึกษาประเด็นต่าง ๆ ดังนี้

- 1) ร้อยละของคะแนนรวมเฉลี่ยเทียบกับคะแนนเต็มในหัวข้อกฎลูกโซ่
- 2) ร้อยละของนักศึกษาที่ไม่ทำข้อสอบ ร้อยละของนักศึกษาที่ทำข้อสอบแต่ไม่ใช้กฎลูกโซ่ และร้อยละของนักศึกษาที่ทำข้อสอบและใช้กฎลูกโซ่ในการหาคำตอบแต่ละข้อ
- 3) ร้อยละของนักศึกษาที่ได้คะแนนเต็มในแต่ละข้อ
- 4) ร้อยละของนักศึกษาที่ใช้กฎลูกโซ่ แต่มีปัญหาในการหาอนุพันธ์ตอนที่ 1 หรือตอนที่ 2 หรือมีปัญหาในการจัดรูปคำตอบ ทำให้คำตอบผิด
- 5) ร้อยละของนักศึกษาที่มีปัญหาความเข้าใจผิดเกี่ยวกับฟังก์ชันในโจทย์แต่ละข้อ

5.3.2 การวิเคราะห์คะแนนรวมเฉลี่ยของนักศึกษาในสาขาวิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและสาขาเทคโนโลยีมัลติมีเดียและแอนิเมชัน ว่าแตกต่างกันหรือไม่

6. ผลการศึกษา

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ของนักศึกษาในการทำโจทย์หัวข้อกฎลูกโซ่ จำนวน 5 ข้อ คะแนนเต็ม 7.5 คะแนน ตลอดจนการศึกษาข้อผิดพลาดในการทำโจทย์ มีผลการศึกษา ดังนี้

1. นักศึกษาทำโจทย์หัวข้อกฎลูกโซ่ได้คะแนนรวมเฉลี่ย 1.13 จากคะแนนเต็ม 7.5 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 15.08
2. ร้อยละของนักศึกษาที่ไม่ทำข้อสอบ ร้อยละของนักศึกษาที่ทำข้อสอบแต่ไม่ใช้กฎลูกโซ่ในการหาคำตอบ และร้อยละของนักศึกษาที่ทำข้อสอบและใช้กฎลูกโซ่ในการหาคำตอบในแต่ละข้อ เทียบกับนักศึกษาที่เข้าสอบจำนวน 160 คน

ข้อที่	นักศึกษาที่ไม่ทำข้อสอบ		นักศึกษาที่ทำข้อสอบแต่ไม่ใช้กฎลูกโซ่		นักศึกษาที่ทำข้อสอบและใช้กฎลูกโซ่	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
1	44	27.50	73	45.63	43	26.88
2	70	43.75	47	29.38	43	26.88
3	57	35.63	57	35.63	46	28.75
4	57	35.63	57	35.63	46	28.75
5	63	39.38	55	34.38	42	26.25

3. ร้อยละของนักศึกษาที่ใช้กฎลูกโซ่ในการหาคำตอบและได้คะแนนเต็ม

ข้อที่	นักศึกษาที่ใช้กฎลูกโซ่ในการหาคำตอบและได้คะแนนเต็ม	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ
1	17 จาก 43	39.53
2	20 จาก 43	46.51
3	22 จาก 46	47.83
4	9 จาก 46	19.57
5	12 จาก 42	28.57

4. ร้อยละของนักศึกษาที่ใช้กฎลูกโซ่ในการหาคำตอบแต่ไม่ได้คะแนนเต็ม

ข้อที่	ร้อยละของนักศึกษาที่ใช้กฎลูกโซ่แต่ไม่ได้คะแนนเต็ม				รวมร้อยละของนักศึกษาที่ใช้กฎลูกโซ่แต่ไม่ได้คะแนนเต็ม
	ไม่สามารถหาอนุพันธ์			สามารถหาอนุพันธ์แต่จัดรูปคำตอบผิด	
	ตอนที่ 1	ตอนที่ 2	ตอนที่ 1 และตอนที่ 2		
1	13.95	9.30	11.63	25.58	60.47
2	4.65	20.93	11.63	16.28	53.49
3	6.52	13.04	13.04	19.57	52.17
4	32.61	8.70	19.57	19.57	80.43
5	2.38	16.67	40.48	11.90	71.43

5. ร้อยละของนักศึกษาที่มีหลักฐานว่าเข้าใจผิดเกี่ยวกับฟังก์ชันในโจทย์ เทียบกับนักศึกษาที่เข้าสอบจำนวน 160 คน

ข้อที่	ฟังก์ชัน	นักศึกษาที่เข้าใจผิด	
		จำนวน (คน)	ร้อยละ
1	$y = \sqrt[3]{5x^4 - 4x^3 + 3x}$	28	17.50
2	$h(x) = \ln(3x^5 + 2x^3 + x)$	14	8.75
3	$y = e^{\cos x}$	16	10.00
4	$f(x) = 3 \sin^4 x$	21	13.13
5	$f(x) = \sin(3x^4)$	52	32.50

6. ผลการทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักศึกษาสาขาวิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและสาขาวิชาเทคโนโลยีมัลติมีเดียและแอนิเมชัน

สาขาวิชา	จำนวน (คน)	คะแนนเฉลี่ยรายข้อ					คะแนนรวมเฉลี่ย
		ข้อ 1	ข้อ 2	ข้อ 3	ข้อ 4	ข้อ 5	
เทคโนโลยีสารสนเทศ	110	0.27	0.29	0.29	0.18	0.17	1.20
เทคโนโลยีมัลติมีเดียและแอนิเมชัน	50	0.23	0.21	0.22	0.18	0.14	0.98

การทดสอบคะแนนรวมเฉลี่ย ได้ค่าสถิติทดสอบ $z_0 = 0.675$

จากการทดสอบทางสถิติพบว่า คะแนนเฉลี่ยรายข้อและคะแนนรวมเฉลี่ยของนักศึกษาทั้ง 2 สาขาวิชา ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

7. สรุปและอภิปรายผล

- จากการศึกษาพบว่า นักศึกษามีคะแนนรวมเฉลี่ยในการทำโจทย์การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่เพียง 1.13 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 15.08 นับว่าผลสัมฤทธิ์ของนักศึกษาในการทำโจทย์หัวข้อนี้ยังไม่น่าพอใจ นอกจากนี้ที่พบว่านักศึกษาเพียงร้อยละ 26.25 – 28.75 เท่านั้นที่ใช้กฎลูกโซ่ในการหาคำตอบแต่ละข้อ ทำให้ทราบว่านักศึกษาส่วนใหญ่ประมาณร้อยละ 70 ยังไม่สามารถตัดสินใจได้ว่าโจทย์เหล่านี้ต้องใช้กฎลูกโซ่ จากประสบการณ์การสอน การที่นักศึกษาจะเลือกหาวิธีการแก้ปัญหของโจทย์นั้น นักศึกษาจะต้องมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ และมีเวลาฝึกทำโจทย์ชนิดต่าง ๆ จำนวนที่มากเพียงพอ จากการศึกษพบว่านักศึกษาร้อยละ 32.50 มีปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งเป็นจำนวนที่มากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับโจทย์ในข้ออื่น ๆ และจากการสอบถามนักศึกษานี้ชั้นเรียนยังพบว่า นักศึกษาเกือบครึ่งอ้างว่าไม่เคยได้เรียนรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งสนับสนุนแนวคิดที่ว่านักศึกษาจำนวนไม่น้อยมีปัญหาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันที่อยู่ในข้อสอบ

- ผลการศึกษาร้อยละของนักศึกษาที่ใช้กฎลูกโซ่ในการหาคำตอบและได้คะแนนเต็ม พบว่าทุกข้อน้อยกว่าร้อยละ 50 ซึ่งเป็นเกณฑ์ที่ไม่น่าพอใจ โดยเฉพาะข้อที่ 4 และข้อที่ 5 ซึ่งเป็นโจทย์เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ จำนวนนักศึกษาที่ได้คะแนนเต็มมีอยู่เพียงร้อยละ 19.57 – 28.57 แสดงให้เห็นว่านักศึกษามีปัญหาในเรื่องความรู้พื้นฐานและการทำโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- สำหรับนักศึกษาที่ใช้กฎลูกโซ่ในการทำโจทย์ แต่เมื่อทำแล้วได้คำตอบผิด การศึกษาพบว่านักศึกษามีปัญหาในการหาอนุพันธ์ตอนที่ 1 หรือตอนที่ 2 หรือทั้ง 2 ตอน เป็นจำนวนมาก คิดเป็นจำนวนรวมร้อยละ 32.61 – 60.87 ส่วนนักศึกษาที่ทำอนุพันธ์ได้แต่จัดรูปคำตอบผิด พบว่านักศึกษายังขาดความรู้พื้นฐานและขาดการฝึกทำและฝึกเขียนการแสดงผลทางคณิตศาสตร์
- กรณีคะแนนรวมเฉลี่ยของนักศึกษาสาขาวิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและสาขาวิชาเทคโนโลยีมีเดียและแอนิเมชันไม่แตกต่างกัน อาจเนื่องมาจากนักศึกษาทั้ง 2 สาขาวิชามีความรู้พื้นฐานใกล้เคียงกัน ส่วนใหญ่ไม่เคยเรียนการหาอนุพันธ์ไม่เคยเรียนฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ อีกทั้งพฤติกรรมการเรียนในห้องของนักศึกษาไม่แตกต่างกัน โดยส่วนใหญ่จะขาดความเอาใจใส่และความกระตือรือร้น ไม่พยายามทำโจทย์ด้วยตนเองและไม่ค่อยมีสมาธิในการเรียน

8. ข้อเสนอแนะ

- ความรู้ความสามารถในการทำโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับกฎลูกโซ่ได้ถูกต้อง ขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายประการ ได้แก่ ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชัน ความเข้าใจกฎลูกโซ่และการนำไปใช้ และการฝึกทำโจทย์การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ ในจำนวนมากเพียงพอ จากผลการศึกษาที่พบว่าผลสัมฤทธิ์ของนักศึกษาค้นคว้ากฎลูกโซ่อยู่ในระดับไม่น่าพอใจ การปรับปรุงการเรียนการสอนจึงต้องคำนึงถึงการปรับปรุงปัจจัยดังกล่าวเท่าที่จะสามารถทำได้ ทั้งนี้ต้องคำนึงถึงพฤติกรรมการเรียนของนักศึกษาประกอบด้วย เพราะเป็นส่วนสำคัญอย่างยิ่งที่จะทำให้การปรับปรุงการเรียนการสอนประสบความสำเร็จ
- สำหรับโจทย์การหาอนุพันธ์ที่ใช้ในการศึกษา เมื่อพิจารณาจากคำตอบที่ผิดของนักศึกษาจำนวนมากที่สุดเป็นอันดับ 1 เทียบกับจำนวนนักศึกษาที่ทำข้อสอบในแต่ละข้อ

ข้อที่	ฟังก์ชัน	คำตอบที่ผิดของนักศึกษา มากที่สุดอันดับ 1	จำนวน (คน)	ร้อยละ
1	$y = \sqrt[3]{5x^4 - 4x^3 + 3x}$	$y' = \frac{1}{3}(20x^3 - 12x^2 + 3)^{-\frac{2}{3}}$	13 จาก 116	11.21
2	$h(x) = \ln(3x^5 + 2x^3 + x)$	$h'(x) = \frac{1}{15x^4 + 6x^2 + 1}$	13 จาก 90	14.44
3	$y = e^{\cos x}$	$y' = e^{-\sin x}$	26 จาก 103	25.24
4	$f(x) = 3 \sin^4 x$	$f'(x) = 12 \cos^3 x$	18 จาก 103	17.48
5	$f(x) = \sin(3x^4)$	$f'(x) = \cos(12x^3)$	23 จาก 97	23.71

จะเห็นว่าคำตอบที่ผิดเกิดจากนักศึกษาขาดความเข้าใจเรื่องฟังก์ชันและการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่ สำหรับการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่ซึ่งประกอบด้วยการหาอนุพันธ์สองตอน การปรับปรุงการเรียนการสอนจึงควรฝึกให้นักศึกษาหาอนุพันธ์ให้ครอบคลุมฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ และเขียนแสดงผลให้ได้ถูกต้องทั้งสองขั้นตอน

9. เอกสารอ้างอิง

- [1] รศ.ดร.ภัทรกุล จริยวิธานนท์, *การศึกษาข้อผิดพลาดในการทำโจทย์คณิตศาสตร์หัวข้อกฎลูกโซ่*, การประชุมมหานครวิชาการ ครั้งที่ 2 เรื่อง การบูรณาการการเรียนการสอนสู่การศึกษาที่ยั่งยืน, โรงพิมพ์แห่งมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร, กรุงเทพฯ, 2552.
- [2] Glass, G.V. and Hopkins, K.D., *Statistical Methods in Education and Psychology*, Third Edition, Allyn and Bacon, Massachusetts, 1996.