



ชื่อ-นามสกุล

เลขประจำตัว

No. 2

แบบฝึกหัดเรื่อง **ลิมิต**

ข้อ 1 - 2 จงหาค่า k ที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องที่ทุกจุด

$$1. f(x) = \begin{cases} 8x-3 & ; x \leq 3 \\ kx^2+3 & ; x > 3 \end{cases}$$

จากโจทย์ เมื่อ $x \leq 3, f(x) = 8x-3$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$
 $f(3) = 8(3)-3 = 21$
 ลิมิตของ $f(x)$ ที่ $x=3$ จาก $f(x) = kx^2+3$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} kx^2+3 = k(3)^2+3$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ ต่อเนื่องที่ 3
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 21$ ดังนั้น $k(3)^2+3 = 21$
 หาร $k = 2$

ตอบ $k = 2$

$$2. f(x) = \begin{cases} kx^2-103 & ; x \leq -4 \\ 7x+k & ; x > -4 \end{cases}$$

$f(x)$ จะต่อเนื่องที่ $x=a$ ก็ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
 เมื่อ $x \leq -4, f(x) = kx^2-103$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = f(-4)$
 $f(-4) = k(-4)^2-103$
 เมื่อ $x > -4, \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 7(-4)+k = k(-4)^2-103 = f(-4)$
 $x \rightarrow -4^+$ ดังนั้น $-28+k = 16k-103 \Rightarrow k = 5$

ตอบ $k = 5$

ข้อ 3 - 4 จงหาค่า a และ b ที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องที่ทุกจุด

$$3. f(x) = \begin{cases} 4+ax & ; x < -3 \\ 2x^2-3x-44 & ; -3 \leq x < 2 \\ 3x^2+b & ; x \geq 2 \end{cases}$$

$f(x)$ จะต่อเนื่องที่ $x=a$ ก็ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$
 $4+a(-3) = 2(-3)^2-3(-3)-44 \Rightarrow a = 7$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
 $2(2)^2-3(2)-44 = 3(2)^2+b \Rightarrow b = -54$

ตอบ $a = 7$
 $b = -54$

$$4. f(x) = \begin{cases} ax+22 & ; x \leq -3 \\ bx+a & ; -3 < x < 5 \\ 3x+b & ; x \geq 5 \end{cases}$$

$f(x)$ จะต่อเนื่องที่ $x=-3$ เมื่อ $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$
 นั่นคือ $a(-3)+22 = b(-3)+a \Rightarrow -4a+3b = -22$ (1)
 $f(x)$ จะต่อเนื่องที่ $x=5$ เมื่อ $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$
 นั่นคือ $b(5)+a = 3(5)+b \Rightarrow a+4b = 15$ (2)
 จากสมการ (1) และ (2) หาร $a=7, b=2$

ตอบ $a = 7$
 $b = 2$

5. พิจารณากราฟสี่ด้าน

- 5.1) จงหาพิกัดของจุด ●
- 5.2) จงหาพิกัดของจุด ■
- 5.3) จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด ● และจุด ■
- 5.4) จงหาพิกัดของจุด ◆
- 5.5) จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด ● และจุด ◆

$$m = \frac{27-3}{5-1} = 6$$

- ตอบ (1 , 3)
- ตอบ (5 , 27)
- ตอบ 6
- ตอบ (2 , 6)
- ตอบ 3

5.6) ถ้าเส้นกราฟสี่ด้าน มีฟังก์ชันคือ $f(x) = x^2+2$

จงหาความชันที่จุด ● (1, 3) $f'(x) = 2x$ หาร slope $2(1) = 2$ ตอบ 2

6. กำหนด $y = f(x) = 5x^2 - 3$ และ $a = 3$

6.1) จงหา $f(a)$

ตอบ $f(a) = 42$

6.2) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $b = 3.2$

↪ $f(b)$

$f(b) = 48.2$

↪ $h = b - a$

$h = 0.2$

↪ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น b

ตอบ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 31$

6.3) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $c = 3.1$

↪ $f(c)$

$f(c) = 45.05$

↪ $h = c - a$

$h = 0.1$

↪ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น c

ตอบ $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 30.5$

6.4) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $d = 3.01$

↪ $f(d)$

$f(d) = 42.3005$

↪ $h = d - a$

$h = 0.01$

↪ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น d

ตอบ $\frac{f(d)-f(a)}{d-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 30.05$

6.5) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = a = 3$

ตอบ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 30$

7. อัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวเส้นรอบวงกลม C เทียบกับความยาวของรัศมี r

7.1) สูตร ความสัมพันธ์ระหว่าง ความยาวเส้นรอบวงกลม A กับรัศมี r ตอบ $C = f(r) = 2\pi r$

7.2) ความยาวของเส้นรอบวงกลม เมื่อความยาวของรัศมี $r + h$ ตอบ $C = f(r + h) = 2\pi(r+h)$

7.3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของความยาวเส้นรอบวงกลมวงกลม C เทียบกับความยาวรัศมี r เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก r เป็น $r + h$

ตอบ $\frac{f(r+h)-f(r)}{h} = \frac{2\pi(r+h)-2\pi r}{h}$

7.4) อัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวเส้นรอบวงกลม A เทียบกับความยาวรัศมี r

ตอบ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h)-f(r)}{h} = 2\pi$

7.5) อัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวเส้นรอบวงกลมเทียบกับรัศมี

ขณะที่ รัศมีเท่ากับ $a = 6$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ตอบ 2π

7.6) อัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวเส้นรอบวงกลมเทียบกับรัศมี

ขณะที่ รัศมีเท่ากับ $b = 8$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ตอบ 2π

8. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลม A เทียบกับความยาวของรัศมี r

8.1) สูตร ความสัมพันธ์ระหว่าง พื้นที่วงกลม A กับรัศมี r

ตอบ $A = f(r) = \pi r^2$

8.2) พื้นที่วงกลม เมื่อความยาวของรัศมี $r + h$

ตอบ $A = f(r + h) = \pi(r+h)^2$

8.3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่วงกลม A เทียบกับความยาวรัศมี r เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก r เป็น $r + h$

ตอบ $\frac{f(r+h)-f(r)}{h} = \frac{\pi(r+h)^2 - \pi r^2}{h}$

8.4) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลม A เทียบกับความยาวรัศมี r

ตอบ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h)-f(r)}{h} = 2\pi r$

8.5) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับรัศมี

ขณะที่ รัศมีเท่ากับ $a = 5$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ 10π

8.6) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับรัศมี

ขณะที่ รัศมีเท่ากับ $b = 7$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ 14π

9. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า A เทียบกับความยาวด้าน x

9.1) สูตร ความสัมพันธ์ระหว่าง พื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า A กับความยาวด้าน x

ตอบ $A = f(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$

9.2) พื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เมื่อความยาวด้านเท่ากับ $x + h$

ตอบ $A = f(x + h) = \frac{\sqrt{3}(x+h)^2}{4}$

9.3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า A เทียบกับความยาวด้าน x เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก x เป็น $x + h$

ตอบ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{\sqrt{3}(x+h)^2}{4} - \frac{\sqrt{3}x^2}{4}}{h}$

9.4) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า A เทียบกับความยาวด้าน x

ตอบ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

9.5) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เทียบกับความยาวด้าน

ขณะที่ ความยาวด้านเท่ากับ $a = 6$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ $3\sqrt{3}$

9.6) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เทียบกับความยาวด้าน

ขณะที่ ความยาวด้านเท่ากับ $b = 7$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

$$Ans1 = (k = 2), \quad , \quad Ans2 = (k = 5), \quad , \quad Ans3 = \begin{bmatrix} a = 7 \\ b = -54 \end{bmatrix}, \quad , \quad Ans4 = \begin{bmatrix} a = 7 \\ b = 2 \end{bmatrix}$$

$$Ans5 = \begin{bmatrix} .1 = (1, 3) \\ .2 = (5, 27) \\ .3 = 6 \\ .4 = (2, 6) \\ .5 = 3 \\ .6 = 2 \end{bmatrix}, \quad , \quad Ans6 = \begin{bmatrix} .1 = [f(a) = 42] \\ .2 = [f(b) = 48.20, h = 0.2, RateOfChange = 31.000] \\ .3 = [f(c) = 45.05, h = 0.1, RateOfChange = 30.500] \\ .4 = [f(d) = 42.3005, h = 0.01, RateOfChange = 30.050] \\ .5 = [RateOfChange at the point a = 30] \end{bmatrix}$$

$$Ans7 = \begin{bmatrix} .1 = [f(r) = 2 \pi r] \\ .2 = [f(r + h) = 2 \pi (r + h)] \\ .3 = \left[\frac{2 \pi (r + h) - 2 \pi r}{h} \right] \\ [.4 = [2 \pi], .5 = [2 \pi], .6 = [2 \pi]] \end{bmatrix}, \quad , \quad Ans8 = \begin{bmatrix} .1 = [f(r) = \pi r^2] \\ .2 = [f(r + h) = \pi (r + h)^2] \\ .3 = \left[\frac{\pi (r + h)^2 - \pi r^2}{h} \right] \\ [.4 = [2 \pi r], .5 = [10 \pi], .6 = [14 \pi]] \end{bmatrix}$$

$$Ans9 = \begin{bmatrix} .1 = \left[f(x) = \frac{\sqrt{3} x^2}{4} \right] \\ .2 = \left[f(x + h) = \frac{\sqrt{3} (x + h)^2}{4} \right] \\ .3 = \left[\frac{\frac{\sqrt{3} (x + h)^2}{4} - \frac{\sqrt{3} x^2}{4}}{h} \right] \\ [.4 = \left[\frac{\sqrt{3} x}{2} \right], .5 = [3 \sqrt{3}], .6 = \left[\frac{7 \sqrt{3}}{2} \right]] \end{bmatrix}, \quad , \quad \begin{bmatrix} M \\ a \\ t \\ h \\ @ \\ M \\ U \\ T \end{bmatrix}$$