



ชื่อ-นามสกุล

เลขประจำตัว No. 1

แบบฝึกหัดเรื่อง ตรีโกณมิติ

1. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ จงใช้กฎของโคไซน์ และสมบัติมุมภายในของสามเหลี่ยม เพื่อหาขนาดของมุม และ ความยาวด้านของสามเหลี่ยม ABC ให้ครบทุกมุม และ ทุกด้าน พร้อมทั้งวาดสามเหลี่ยม ABC

$$\cos(75^\circ) = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin(15^\circ)$$

$$\sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(75^\circ) = \sin(105^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

1.1) กำหนด $a = 13\sqrt{2}\sqrt{3} + 39\sqrt{2} = 87$, $b = 78$, $c = 26\sqrt{2}\sqrt{3}$

ขนาดของมุม
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
 $\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

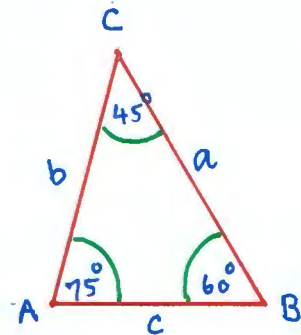
ความยาวด้าน
 $a = 13\sqrt{2}\sqrt{3} + 39\sqrt{2} = 87$

$\angle A = 75^\circ$
 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{13\sqrt{2}\sqrt{3} + 39\sqrt{2}} = \frac{\sin B}{78}$
 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle B = 60^\circ$
 $b = 78$

$\angle C = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$
 $c = 26\sqrt{2}\sqrt{3}$

วาดภาพ ΔABC



1.2) กำหนด $A = 30^\circ$, $c = 72\sqrt{2} = 101.82$, $b = 36\sqrt{2}\sqrt{3} - 36\sqrt{2} = 37.27$

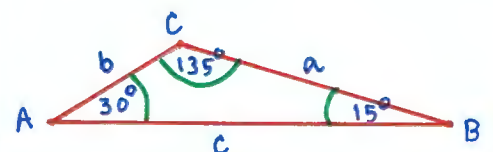
วาดภาพ ΔABC

ขนาดของมุม
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $= (36\sqrt{2}\sqrt{3} - 36\sqrt{2})^2 + (72\sqrt{2})^2 - 2(36\sqrt{2}\sqrt{3} - 36\sqrt{2})(72\sqrt{2}) \cos(30^\circ)$
 $a^2 = 5184$
 $a = 72$

$\angle A = 30^\circ$
 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{72} = \frac{\sin B}{36\sqrt{2}\sqrt{3} - 36\sqrt{2}}$
 $\sin B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\angle B = 15^\circ$
 $b = 36\sqrt{2}\sqrt{3} - 36\sqrt{2} = 37.27$

$\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 15^\circ) = 135^\circ$
 $c = 72\sqrt{2} = 101.82$



2. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ
จงใช้ กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ และสมบัติมุมภายในของสามเหลี่ยม

$$\sin(75^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

เพื่อหาขนาดของมุม และ ความยาวด้านของสามเหลี่ยม ABC ให้ครบทุกมุม และ ทุกด้าน พร้อมทั้งงาตสามเหลี่ยม ABC

2.1) กำหนด $A = 60^\circ, B = 75^\circ, c = 22\sqrt{2}\sqrt{3} = 53.89$

ขนาดของมุม

$\angle A = 60^\circ$

$\angle B = 75^\circ$

$\angle C = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

ความยาวด้าน

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin(60^\circ)}{a} = \frac{\sin(45^\circ)}{22\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

$a = 66$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{66} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{b}$$

$b = 11\sqrt{2}\sqrt{3} + 33\sqrt{2} = 73.61$

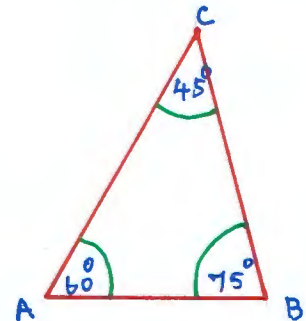
$c = 22\sqrt{2}\sqrt{3} = 53.89$

$$\cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(75^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(105^\circ) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

วาดภาพ $\triangle ABC$



2.2) กำหนด $B = 45^\circ, C = 15^\circ, a = 39\sqrt{2}\sqrt{3} = 95.53$

ขนาดของมุม

$\angle A = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = 120^\circ$

$\angle B = 45^\circ$

$\angle C = 15^\circ$

ความยาวด้าน

$a = 39\sqrt{2}\sqrt{3} = 95.53$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{39\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{b}$$

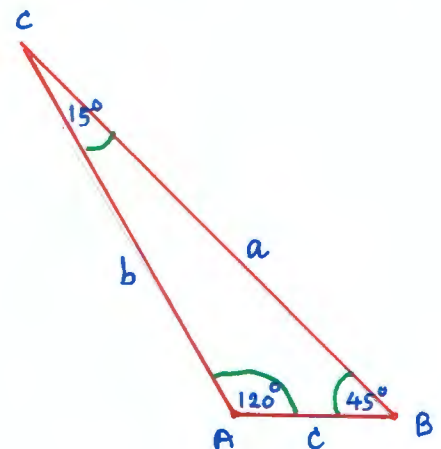
$b = 78$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{39\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{c}$$

$c = 39\sqrt{3} - 39 = 28.55$

วาดภาพ $\triangle ABC$



3. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ จงหา \sin พื้นที่ของ $\triangle ABC$

3.1) กำหนด $\beta = 30^\circ, c = 48\sqrt{3} = 83.14, a = 48$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} ac \sin B \\ &= \frac{1}{2} (48)(48\sqrt{3}) \sin(30^\circ) \\ &= 1,152\sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 576\sqrt{3} \\ &= 997.661 \end{aligned}$$

ตอบ พื้นที่ $\triangle ABC = 997.661$

3.2) กำหนด $A = 45^\circ, b = 36 + 36\sqrt{3} = 98.35, c = 36\sqrt{2} = 50.91$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} bc \sin A \\ &= \frac{1}{2} (36 + 36\sqrt{3})(36\sqrt{2}) \sin(45^\circ) \\ &= 648 + 648\sqrt{3} \\ &= 1,770.369 \end{aligned}$$

ตอบ พื้นที่ $\triangle ABC = 1,770.369$

4. [The Ambiguous Case (SSA)] กรณีที่โจทย์กำหนด ความยาวด้านสองด้าน และ มุม (ที่ไม่ได้อยู่ระหว่างด้านทั้งสองที่กำหนด) อาจมีคำตอบเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ 1 รูป, ไม่มีสามเหลี่ยมที่เป็นคำตอบ หรืออาจมีรูปสามเหลี่ยมที่เป็นคำตอบได้ 2 รูป !!!
รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ

ถ้าความยาวด้าน $a = 72$ หน่วย, ความยาวด้าน $b = 72\sqrt{3} = 124.71$ หน่วย และ มุม ขนาดมุม $A = 30^\circ$

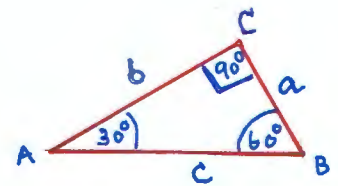
จงหาขนาดของ $\angle B, \angle C$, ความยาวด้าน c , พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC พร้อมทั้งวาดสามเหลี่ยม ABC

4.1) กรณี $\angle B < 90^\circ$ (B เป็นมุมแหลม)

จงหา $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin(30^\circ)}{72} = \frac{\sin B}{72\sqrt{3}}$
 $\sin B = \frac{72\sqrt{3}(\frac{1}{2})}{72} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 ขนาดของ $\angle B = 60^\circ$ (B เป็นมุมแหลม) $B = 60^\circ$ หรือ 120°

ขนาดของ $\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$
 $c = \sqrt{72^2 + (72\sqrt{3})^2} = \sqrt{72^2(1+3)} = 72(2)$
 ความยาวด้าน $c = 144$

วาดภาพ $\triangle ABC$



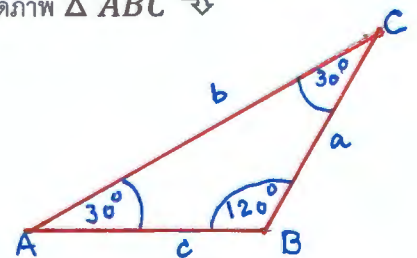
พื้นที่ของ $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$
 $= \frac{1}{2} \times 72 \times 72\sqrt{3}$
 $= 2592\sqrt{3} = 4489.47$

4.2) กรณี $\angle B > 90^\circ$ (B เป็นมุมป้าน)

จงหา
 ขนาดของ $\angle B = 120^\circ$ (B เป็นมุมป้าน)

ขนาดของ $\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$
 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin(30^\circ)}{72} = \frac{\sin(30^\circ)}{c}$
 ความยาวด้าน $c = 72$

วาดภาพ $\triangle ABC$



พื้นที่ของ $\triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$
 $= \frac{1}{2} (72)(72\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}\right)$
 $= 1,296\sqrt{3}$
 $= 2,244.738$

