



ชื่อ-นามสกุล

เลขประจำตัว No.3

แบบฝึกหัดเรื่อง ตรีโกณมิติ

1. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ
จงใช้กฎของโคไซน์ และสมบัติมุมภายในของสามเหลี่ยม

เพื่อหาขนาดของมุม และ ความยาวด้านของสามเหลี่ยม ABC ให้ครบทุกมุม และ ทุกด้าน พร้อมทั้งวาดสามเหลี่ยม ABC

1.1) กำหนด $a = 54\sqrt{2} = 76.37, b = 54, c = 27\sqrt{2}\sqrt{3} - 27\sqrt{2} = 27.95$

$$\sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(75^\circ) = \sin(105^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

ขนาดของมุม

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2ab} \Rightarrow \cos A = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\angle A = 135^\circ \quad A = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b}{a} \sin A$$

$$\Rightarrow B = \sin^{-1}\left(\frac{b}{a} \sin A\right)$$

$$\angle B = 30^\circ$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow C = \sin^{-1}\left(\frac{c}{b} \sin B\right)$$

$$C = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) = 15^\circ$$

$$\angle C = 15^\circ$$

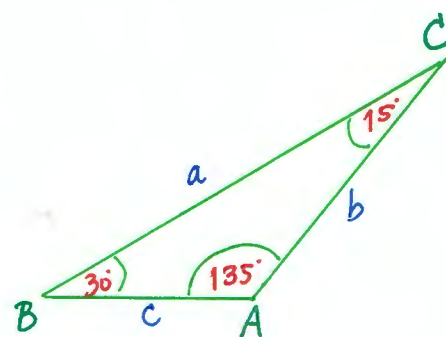
ความยาวด้าน

$$a = 54\sqrt{2} = 76.37$$

$$b = 54$$

$$c = 27\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 27\sqrt{2} = 27.95$$

วาดภาพ $\triangle ABC$ ⇨



1.2) กำหนด $C = 45^\circ, a = 33 + 33\sqrt{3} = 90.16, b = 33\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 80.83$

วาดภาพ $\triangle ABC$ ⇨

ขนาดของมุม

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{a}{c} \sin C$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow A = 75^\circ$$

$$\angle A = 75^\circ$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{b}{c} \sin C$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow B = 60^\circ$$

$$\angle B = 60^\circ$$

$$\angle C = 45^\circ$$

ความยาวด้าน

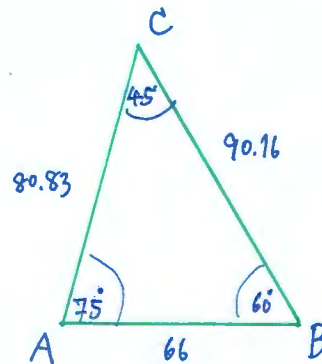
$$a = 33 + 33\sqrt{3} = 90.16$$

$$b = 33\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 80.83$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = (66)^2 \Rightarrow c = 66$$

$$c = 66$$



2. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ
จงใช้ กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ และสมบัติมุมภายในของสามเหลี่ยม

เพื่อหาขนาดของมุม และ ความยาวด้านของสามเหลี่ยม ABC ให้ครบทุกมุม และ ทุกด้าน พร้อมทั้งวาดสามเหลี่ยม ABC

2.1) กำหนด $B=60^\circ, C=75^\circ, a=26\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 63.69$

ขนาดของมุม
มุม $A = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ)$
 $= 45^\circ$

$\angle A = 45^\circ$

$\angle B = 60^\circ$

$\angle C = 75^\circ$

ความยาวด้าน

$a = 26\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A}$
 $\Rightarrow b = \frac{26\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$

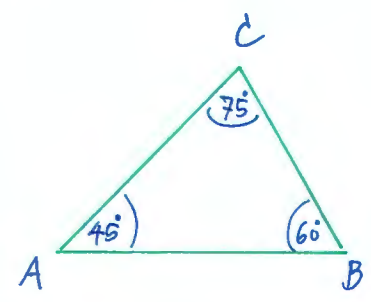
$b = 78$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
 $= (26\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})^2 + (78)^2 - 2(26\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})(78) \cos(75^\circ)$
 $c^2 = 7568.599$
 $c \approx 87$

$c = 87$

$\cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
 $\cos(75^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
 $\cos(105^\circ) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

วาดภาพ $\triangle ABC$



2.2) กำหนด $C=45^\circ, A=15^\circ, b=45\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 110.23$

ขนาดของมุม

มุม $B = 180^\circ - (15^\circ + 45^\circ)$
 $= 120^\circ$

$\angle A = 15^\circ$

$\angle B = 120^\circ$

$\angle C = 45^\circ$

ความยาวด้าน

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $= (45\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})^2 + (90)^2 - 2(45\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})(90) \cos(15^\circ)$
 $a^2 = 1085.1942$
 $a \approx 32.94$

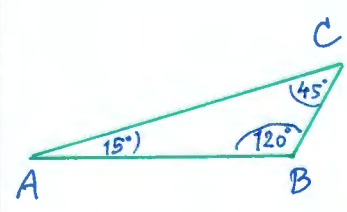
$a = 32.94$

$b = 45\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{b \sin C}{\sin B}$
 $c = \frac{45\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = 90$

$c = 90$

วาดภาพ $\triangle ABC$



3. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ จงหา \sin พื้นที่ของ ΔABC

3.1) กำหนด $B = 30^\circ, a = 72\sqrt{2} = 101.82, c = 36\sqrt{2} + 36\sqrt{2}\sqrt{3} = 139.09$

พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2} ac \sin B$
 $= \frac{1}{2} (72\sqrt{2})(36\sqrt{2} + 36\sqrt{2}\sqrt{3}) \sin(30^\circ)$
 $= 1296 + 1296\sqrt{3} = 3540.738$

ตอบ พื้นที่ $\Delta ABC = 3540.738$

3.2) กำหนด $C = 60^\circ, a = 18\sqrt{2}\sqrt{3} = 44.09, b = 9\sqrt{2}\sqrt{3} + 27\sqrt{2} = 60.23$

พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$
 $= \frac{1}{2} (18\sqrt{2}\sqrt{3})(9\sqrt{2}\sqrt{3} + 27\sqrt{2}) \sin(60^\circ)$
 $= 243\sqrt{3} + 729$
 $= 1149.888$

ตอบ พื้นที่ $\Delta ABC = 1149.888$

4. [The Ambiguous Case (SSA)] กรณีที่โจทย์กำหนด ความยาวด้านสองด้าน และ มุม (ที่ไม่ได้อยู่ระหว่างด้านทั้งสองที่กำหนด) อาจมีคำตอบเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ 1 รูป, ไม่มีสามเหลี่ยมที่เป็นคำตอบ หรืออาจมีรูปสามเหลี่ยมที่เป็นคำตอบได้ 2 รูป !!!
 รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ

ถ้าความยาวด้าน $a = 66$ หน่วย, ความยาวด้าน $b = 66\sqrt{3} = 114.32$ หน่วย และ มุม ขนาดมุม $A = 30^\circ$
 จงหาขนาดของ $\angle B, \angle C$, ความยาวด้าน c , พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC พร้อมทั้งวาดสามเหลี่ยม ABC

4.1) กรณี $\angle B < 90^\circ$ (B เป็นมุมแหลม)

จงหา $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{66\sqrt{3}}{66} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\Rightarrow B = 60^\circ$ หรือ 120°

ขนาดของ $\angle B = 60^\circ$ (มุมแหลม)

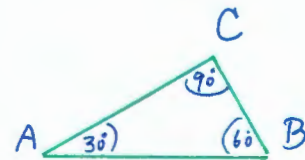
มุม $C = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$

ขนาดของ $\angle C = 90^\circ$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (66)^2 + (66\sqrt{3})^2 - 2(66)(66\sqrt{3}) \cos(90^\circ) = 17424$

ได้ $c = \sqrt{17424} = 132$
 ความยาวด้าน $c = 132$

วาดภาพ ΔABC



พื้นที่ของ $\Delta ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$
 $= \frac{1}{2} (66)(66\sqrt{3}) \sin 90^\circ$
 $= 3772.407$

4.2) กรณี $\angle B > 90^\circ$ (B เป็นมุมป้าน)

จงหา

ขนาดของ $\angle B = 120^\circ$ (มุมป้าน)

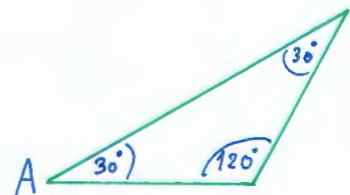
มุม $C = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$

ขนาดของ $\angle C = 30^\circ$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (66)^2 + (66\sqrt{3})^2 - 2(66)(66\sqrt{3}) \cos(30^\circ) = 4356$

ได้ $c = \sqrt{4356} = 66$
 ความยาวด้าน $c = 66$

วาดภาพ ΔABC



พื้นที่ของ $\Delta ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$
 $= \frac{1}{2} (66)(66\sqrt{3}) \sin(30^\circ)$
 $= 1886.203$

