

การแยกเศษส่วนย่อยโดยใช้ Lagrange polynomial

ถ้าต้องการเปลี่ยน Rational function $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n โดยที่ $n > m$ และ

$$Q(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

เมื่อ x_i แตกต่างกันทั้งหมด ให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อยได้โดยใช้ Lagrange polynomial ได้ดังนี้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{P(x_j)}{Q'(x_j)} \cdot \frac{1}{x - x_j}$$

ตัวอย่าง จงเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อย

$$\frac{x}{x^2 - 1}$$

วิธีทำ

พิจารณาโจทย์เทียบกับสูตรจะได้ว่า $P(x) = x$, $Q(x) = x^2 - 1$ และ $Q'(x) = 2x$
นอกจากนี้ $Q(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = (x - 1)(x - (-1))$ ดังนั้น $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 - 1} &= \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)} \cdot \frac{1}{x - x_1} + \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)} \cdot \frac{1}{x - x_2} \\ &= \frac{P(1)}{Q'(1)} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)} \cdot \frac{1}{x - (-1)} \\ &= \frac{1}{2(1)} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{(-1)}{2(-1)} \cdot \frac{1}{x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2(x - 1)} + \frac{1}{2(x + 1)}$$

ตัวอย่าง จงเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อย

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{(x - 3)(x + 1)x}$$

วิธีทำ

พิจารณาโจทย์เทียบกับสูตรจะได้ว่า $P(x) = x^2 - 3x + 1$, ดังนั้น $Q(x) = x(x - 3)(x + 1)$
และ $Q'(x) = (x - 3)(x + 1) + x(x + 1) + x(x - 3)$ และ $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{x^2-3x+1}{(x-3)(x+1)x} &= \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)} \cdot \frac{1}{x-x_1} + \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)} \cdot \frac{1}{x-x_2} + \frac{P(x_3)}{Q'(x_3)} \cdot \frac{1}{x-x_3} \\ &= \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-(-1)} + \frac{1}{(-3)} \cdot \frac{1}{x-(0)} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x-3} \\ &= \frac{5}{4(x+1)} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{12(x-3)}\end{aligned}$$

โดยที่

$$P(x_1) = P(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 1 = 5$$

$$Q'(x_1) = Q'(-1) = 0 + 0 + (-1)((-1) - 3) = 4$$

$$P(x_2) = P(0) = (0)^2 - 3(0) + 1 = 1$$

$$Q'(x_2) = Q'(0) = ((0) - 3)((0) + 1) + 0 + 0 = -3$$

$$P(x_3) = P(3) = (3)^2 - 3(3) + 1 = 1$$

$$Q'(x_3) = Q'(3) = 0 + (3)((3) + 1) + 0 = 12$$

แบบฝึกหัด จงเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อย

$$1. \frac{4x-3}{x^2-3x-4}$$

$$2. \frac{-5}{x^3-7x-6}$$

$$3. \frac{5-3x-x^2}{x^3-7x^2+14x-8}$$

$$4. \frac{2}{x^3-8x^2+15x}$$

เฉลย

$$1. \frac{7}{5(x+1)} + \frac{13}{5(x-4)}$$

$$2. \frac{5}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-3)} - \frac{1}{x+2}$$

$$3. \frac{5}{2(x-2)} - \frac{23}{6(x-4)} + \frac{1}{3(x-1)}$$

$$4. -\frac{1}{3(x-3)} + \frac{1}{5(x-5)} + \frac{2}{15x}$$

ข้อมูลอ้างอิง

http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_fraction

โปรแกรม

Maple 8

ผู้จัดทำ

วิรัตน์ ศิริมังคลานุรักษ์