

พหุนาม

เอกนาม

ในการเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวนเราจะใช้ตัวเลข แต่ในบางครั้งเราไม่สามารถเขียนแทนจำนวนด้วยตัวเลขได้ เช่น

1. จำนวน จำนวนหนึ่งบวก 4
2. จำนวน จำนวนหนึ่งคูณ 5
3. จำนวน จำนวนหนึ่งหารด้วย 10
4. ผลคูณของจำนวนหนึ่งกับ 2

จะเห็นว่าเราไม่สามารถแทนจำนวนหนึ่งด้วยตัวเลขได้ เพราะเราไม่ทราบค่าของจำนวนนั้น ซึ่งเราจะใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็ก เช่น x , y , z แทนคำว่าจำนวนหนึ่ง และเรียกอักษรที่ใช้แทนจำนวนเหล่านั้นว่า ตัวแปร และตัวเลขที่แทนจำนวน เรียกว่า ค่าคงตัว

ดังนั้นจาก 1. จำนวน จำนวนหนึ่งบวก 4

ถ้าเราแทนจำนวนหนึ่งด้วยตัวอักษร x เราจะเรียก x ว่าตัวแปร x และมี 4 เป็นค่าคงตัว ซึ่งเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้ $x+4$ หรือ $4+x$ ดังนั้น เมื่อเราเห็นสัญลักษณ์ $x+4$ จะหมายความว่า
จำนวน จำนวนหนึ่ง บวกกับ 4

2. จำนวน จำนวนหนึ่งคูณ 5

ถ้าเราแทนจำนวนหนึ่งด้วยตัวอักษร y เราจะเรียก y ว่าตัวแปร y และมี 5 เป็นค่าคงตัว ซึ่งเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้ $y \times 5$ หรือ $5y$ ดังนั้น เมื่อเราเห็นสัญลักษณ์ $5y$ จะหมายความว่า
จำนวน จำนวนหนึ่ง คูณด้วย 5

เราจะเรียกข้อความในรูปสัญลักษณ์ เช่น -5 , 10 , $x+4$, $5y$, $\frac{z}{10}$, x^2 , $x+y$, x^2y ว่า

นิพจน์

การลดรูปหรือรูปที่สั้น

นิพจน์ x^2 มาจากการ $x \times x$ แล้วเปลี่ยนให้อยู่ในรูปเลขชี้กำลัง ดังนั้น $x^2 = x \times x$

นิพจน์ xy มาจากการ $x \times y$ แล้วลดรูป ดังนั้น $xy = x \times y$

นิพจน์ x^2y มาจากการ $x \times x \times y$ แล้วลดรูป ดังนั้น $x^2y = x \times x \times y$

นิพจน์ x เราอาจเขียนเป็น $x \cdot 1$ ได้ ดังนั้น $x = x \cdot 1 = 1 \cdot x$

จาก $2 \times x$ เมื่อเขียนในรูปที่สั้นจะได้ดังนี้ $2x$

$$x \times y \times x \times y \times x \times \left(-\frac{3}{4}\right) \text{ เมื่อเขียนในรูปที่สั้นจะได้ดังนี้ } -\frac{3}{4}x^3y^2$$

$$1 \times x \text{ เมื่อเขียนในรูปที่สั้นจะได้ดังนี้ } x \quad -1 \times x \text{ เมื่อเขียนในรูปที่สั้นจะได้ดังนี้ } -x$$

นิยาม เอกนาม

นิพจน์ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการคูณของค่าคงตัวกับตัวแปรตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไป โดยที่เลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นศูนย์ หรือจำนวนเต็มบวก เรียกว่า **เอกนาม**

ตัวอย่าง นิพจน์ต่อไปนี้เป็นเอกนาม

$$3, -4, 5x, -2x^3, 6x^2y^5$$

พิจารณา 3 สามารถเขียนอยู่ในรูป $3 \cdot 1 = 3 \cdot x^0$ จะเห็นว่ากำลังของตัวแปร x เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ซึ่งในตัวอย่างนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์

ตัวอย่าง นิพจน์ต่อไปนี้ไม่เป็นเอกนาม

$$\frac{5}{x}, -2x^{\frac{2}{3}}, 6x^2y^{-5}, 5x+3y, 10-4y$$

พิจารณา $\frac{5}{x}$ ไม่เป็นเอกนามเพราะเมื่อเราจัดรูปให้อยู่ในรูปเลขชี้กำลังจะได้ว่า

$$\frac{5}{x} = 5 \cdot \frac{1}{x} = 5 \cdot x^{-1} = 5x^{-1}$$

จะเห็นว่ากำลังของตัวแปร x มีค่าเท่ากับ -1 ซึ่งไม่เป็นไปตามนิยามของเอกนาม ที่กำลังของตัวแปรจะต้องเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เท่านั้น

พิจารณา $-2x^{\frac{2}{3}}$ ไม่เป็นเอกนามเพราะกำลังของตัวแปร x เป็นเศษส่วนซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{2}{3}$

พิจารณา $6x^2y^{-5}$ ไม่เป็นเอกนามเพราะกำลังของตัวแปร y เป็นจำนวนเต็มลบ (-5)

พิจารณา $5x+3y$ ไม่เป็นเอกนามเพราะเอกนามจะอยู่ในรูปผลคูณเท่านั้น แต่ในตัวอย่างนี้เป็นรูปของผลบวก ถ้าเราแยกพิจารณาแต่ละพจน์ จะเห็นว่าเป็น เอกนาม แต่เมื่อนำเอกนามมาบวกกัน จะไม่เป็นเอกนาม แต่จะเรียกว่า **พหุนาม** ซึ่งจะอธิบายต่อไปในภายหลัง

สรุป

เอกนามประกอบด้วยสองส่วน คือส่วนที่เป็นค่าคงตัวคูณกับส่วนที่สองที่อยู่ในรูปของตัวแปร โดยเลขชี้กำลังของตัวแปรจะต้องเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ จะเรียกส่วนของค่าคงตัวว่า **สัมประสิทธิ์**ของเอกนาม และเรียกผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปรทั้งหมดในเอกนามว่า **ดีกรี**ของเอกนาม ถ้าเอกนามที่ไม่มีส่วนของค่าคงตัว จะได้ว่าสัมประสิทธิ์ของเอกนามนั้นมีค่าเท่ากับ 1 เพราะ 1 เป็นเอกลักษณ์ของการคูณ

ตัวอย่าง จงบอกสัมประสิทธิ์และดีกรีของเอกนามต่อไปนี้

	เอกนาม	สัมประสิทธิ์	ดีกรี
1.	$3x$	3	1
2.	$-0.5x^2$	-0.5	2
3.	7	7	0
4.	x^3yz^2	1	6
5.	0	0	-

0 ว่าเป็นเอกนามที่มีสัมประสิทธิ์เท่ากับ 0 ส่วนดีกรีของดีกรีไม่สามารถระบุได้ เพราะ $0 = 0 \cdot x^n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ซึ่งเราไม่ทราบค่าแน่นอนของ n ดังนั้นจึงไม่สามารถบอกดีกรีของเอกนามนี้ได้

การบวกและการลบเอกนาม

นิยาม เอกนามคล้ายกัน

เอกนามสองเอกนามคล้ายกัน ต่อเมื่อ

1. เอกนามทั้งสองมีตัวแปรชุดเดียวกัน และ
2. เลขชี้กำลังของตัวแปรตัวเดียวกันในแต่ละเอกนามเท่ากัน

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าเอกนามแต่ละคู่ต่อไปนี้คล้ายกันหรือไม่

			คล้ายกัน	เหตุผล
1.	$3x$	$-2x$	✓	
2.	4	2	✓	
3.	$2x^2y$	$2xy^2$	✗	
4.	$3x^2y^2$	$3x^2y^2$	✓	
5.	$6x^2y$	$6x^2z$	✗	
6.	$\frac{1}{3}x^2y^0$	$\frac{1}{2}x^3$	✓	
7.	$3x^2$	$-2x$	✗	

หมายเหตุ ✓ คล้ายกัน ✗ ไม่คล้ายกัน

ผลบวกของเอกนามที่คล้ายกัน =

(ผลบวกของสัมประสิทธิ์) \times (ส่วนที่อยู่ในรูปการคูณของตัวแปร)

หมายเหตุ เราไม่สามารถบวกเอกนามที่ไม่คล้ายกัน

ตัวอย่าง จงหาผลบวกของเอกนามต่อไปนี้

$$1. 3x^2 + 4x^2 = (3+4)x^2 = 7x^2$$

$$2. 6x^2y + 8x^2y = (6+8)x^2y = 14x^2y$$

$$3. 3s^3t^2 + 5s^3t^2 = (3+5)s^3t^2 = 8s^3t^2$$

$$4. 2x - 4x = 2x + (-4)x = (2 + (-4))x = (2-4)x = -2x$$

$$5. 15x^2y - 8x^2y = (15-8)x^2y = 7x^2y$$

แบบฝึกหัด จงหาผลบวกของเอกนามต่อไปนี้

$$1. 3x^4 - x^4$$

$$2. x^2y - 5x^2y$$

$$3. 6rt - 4rt$$

$$4. 10y^2 - 5y^2$$

เฉลย 1. $2x^4$ 2. $-4x^2y$ 3. $2rt$ 4. $5y^2$

นิยาม พหุนาม

นิพจน์ที่สามารถเขียนในรูปเอกนามหรือ สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวก(หรือผลลบ)ของเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไปเรียกว่า **พหุนาม**

หมายเหตุ เพื่อความสะดวก ต่อไปนี้จะเรียกเอกนามว่า **พจน์** ในกรณีที่เอกนามคล้ายกัน จะเรียกว่า **พจน์ที่คล้ายกัน**

เช่น

$$3x^2 - 6x + 4 + x^2 + 2x - 5$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 พจน์ที่ 1 2 3 4 5 6

จะเห็นว่า พจน์ที่ 1 ($3x^2$) จะคล้ายกับพจน์ที่ 4 (x^2)

พจน์ที่ 2 ($-6x$) จะคล้ายกับพจน์ที่ 5 ($2x$) และ

พจน์ที่ 3 (4) จะคล้ายกับพจน์ที่ 6 (-5)

ถ้าพหุนามใดมีพจน์บางพจน์ที่คล้ายกันเราควรรวมพจน์เหล่านั้นเข้าด้วยกัน เพื่อให้ได้พหุนามอยู่ในรูปที่ไม่มีพจน์ที่คล้ายกัน เช่น

$$3x^2 - 6x + 4 + x^2 + 2x - 5$$

รวมพจน์ที่คล้ายกันได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 4 + x^2 + 2x - 5 &= 3x^2 + x^2 - 6x + 2x + 4 - 5 \\ &= (3+1)x^2 + (-6+2)x + (4-5) \\ &= 4x^2 - 4x - 1 \end{aligned}$$

เรียกพหุนามที่ไม่มีพจน์ที่คล้ายกันเลยว่า **พหุนามในรูปผลสำเร็จ**

เมื่อเขียนพหุนามให้อยู่ในรูปพหุนามในรูปผลสำเร็จแล้วจะถือว่าดีกรีสูงสุดของพจน์ในพหุนามเป็นดีกรีของพหุนาม

ตัวอย่าง จงเขียนพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จ และบอกดีกรีของพหุนาม

$$\begin{aligned} 1. \quad & -3x^4 + 4x^3 - x^2 - 10x + 5 + 2x^4 + 5x^2 + 2x + 6 \\ &= -3x^4 + 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 5x^2 - 10x + 2x + 5 + 6 \\ &= (-3+2)x^4 + 4x^3 + (-1+5)x^2 + (-10+2)x + (5+6) \\ &= (-1)x^4 + 4x^3 + (4)x^2 + (-8)x + (11) \\ &= -x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8x + 11 \end{aligned}$$

พหุนามรูปสำเร็จคือ $-x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8x + 11$ ดีกรีของพหุนามนี้คือ 4

$$\begin{aligned} 2. \quad & 3x^2y^2 + 6xy^2 + 4y^2 - x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 \\ &= 3x^2y^2 - x^2y^2 + 6xy^2 - 2xy^2 + 4y^2 + y^2 \\ &= (3-1)x^2y^2 + (6-2)xy^2 + (4+1)y^2 \\ &= (2)x^2y^2 + (4)xy^2 + (5)y^2 \\ &= 2x^2y^2 + 4xy^2 + 5y^2 \end{aligned}$$

พหุนามรูปสำเร็จคือ $2x^2y^2 + 4xy^2 + 5y^2$ ดีกรีของพหุนามนี้คือ 4

การบวกและการลบพหุนาม

ผลบวกของพหุนามหาได้โดยการนำพหุนามมาเขียนในรูปการบวกและถ้ามีพจน์ที่คล้ายกันให้บวกพจน์ที่คล้ายกันเข้าด้วยกัน

ตัวอย่าง จงหาผลบวกของพหุนามต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1. \quad & x^2 + 3x - 4 \text{ กับ } 4x^3 - 2x^2 + 5 \\ & (x^2 + 3x - 4) + (4x^3 - 2x^2 + 5) = 4x^3 + x^2 - 2x^2 + 3x - 4 + 5 \\ &= 4x^3 + (1-2)x^2 + 3x + (-4+5) \\ &= 4x^3 + (-1)x^2 + 3x + (1) \\ &= 4x^3 - x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad x^2 - 2xy + 3y^2 \text{ กับ } 2x^2 + 4xy - 7y^2 \\
(x^2 - 2xy + 3y^2) + (2x^2 + 4xy - 7y^2) &= x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x^2 + 4xy - 7y^2 \\
&= x^2 + 2x^2 - 2xy + 4xy + 3y^2 - 7y^2 \\
&= (1+2)x^2 + (-2+4)xy + (3-7)y^2 \\
&= (3)x^2 + (2)xy + (-4)y^2 \\
&= 3x^2 + 2xy - 4y^2
\end{aligned}$$

จำนวนตรงข้ามของพหุนาม

จำนวนตรงข้ามของพหุนามใด คือ ผลบวกของจำนวนตรงข้ามของพจน์แต่ละพจน์ในพหุนามนั้น

ตัวอย่าง จำนวนตรงข้ามของเอกนาม และพหุนาม

1. 5 มีจำนวนตรงข้ามคือ -5

2. x มีจำนวนตรงข้ามคือ $-x$

3. $x + y$ มีจำนวนตรงข้ามคือ $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$

จะเห็นว่า $-x$ เป็นจำนวนตรงข้ามของ x และ $-y$ มีจำนวนตรงข้ามกับ y

ดังนั้น จำนวนตรงข้ามของ $x + y$ คือ ผลบวกของจำนวนตรงข้ามของ x และ y

ซึ่งก็คือ $= -x - y$

	เอกนาม / พหุนาม	จำนวนตรงข้าม
1.	x^2	$-x^2$
2.	$x - 5$	$-(x - 5) = -x + 5$
3.	$-s + 3t$	$-(-s + 3t) = s - 3t$
4.	$x(x - 2)$	$-x(x - 2) = -x^2 + 2x$

การลบพหุนาม

การลบพหุนามด้วยพหุนามทำได้โดยการบวกพหุนามที่เป็นตัวตั้งด้วยจำนวนตรงข้ามของพจน์แต่ละพจน์ของพหุนามที่เป็นตัวลบ

ตัวอย่าง จงหาผลลบของพหุนามต่อไปนี้ โดยใช้พหุนามแรกเป็นตัวตั้ง

1. $x + 4, x - 2$

จำนวนตรงข้ามของตัวลบคือ $-(x - 2) = -x + 2$

$$(x + 4) - (x - 2) = (x + 4) + (-x + 2) = x - x + 4 + 2 = 6$$

$$2. x^3 - 4x^2 + 3x + 4, x^3 - 5x + 2$$

จำนวนตรงข้ามของตัวลบคือ $-x^3 + 5x - 2$

$$\begin{aligned} & (x^3 - 4x^2 + 3x + 4) - (x^3 - 5x + 2) \\ &= (x^3 - 4x^2 + 3x + 4) + (-x^3 + 5x - 2) \\ &= x^3 - 4x^2 + 3x + 4 - x^3 + 5x - 2 \\ &= x^3 - x^3 - 4x^2 + 3x + 5x + 4 - 2 \\ &= -4x^2 + 8x + 2 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด จงหาผลบวกหรือผลลบของพหุนามต่อไปนี้

$$1. (2x^2 - 4x + 3) + (x^2 + x - 1)$$

$$2. (3x^2y - 2xy + 3) - (5x^2y + 3xy + 2)$$

$$3. (5rt^3 - 4rt^2 - 2r) + (r + 3rt^2 - 2rt^3)$$

$$4. (5x^3 - 2x^2 + 4x + 6) - (2x^3 - x^2 + 4)$$

เฉลย

$$1. 3x^2 - 3x + 2$$

$$2. -2x^2y - 5xy + 1$$

$$3. 3rt^3 - rt^2 - r$$

$$4. 3x^3 - x^2 + 4x + 2$$

การคูณพหุนาม

การหาผลคูณระหว่างพหุนามกับพหุนาม ทำได้โดยคูณแต่ละพจน์ของพหุนามหนึ่งกับทุกพจน์ของอีกพหุนามหนึ่ง แล้วนำผลคูณเหล่านั้นมาบวกกัน

ตัวอย่าง จงหาผลคูณของเอกนามกับพหุนามต่อไปนี้

$$1. x(x-4) = x(x+(-4)) = x \cdot x + x \cdot (-4) = x^2 + (-4)x = x^2 - 4x$$

หรือ

$$x(x-4) = x \cdot x - x \cdot 4 = x^2 - 4x$$

$$2. 3x^2(x-2y) = 3x^2(x+(-2)y) = 3x^2 \cdot x + x \cdot (-2)y = x^3 + (-2)xy = x^3 - 2xy$$

หรือ

$$3x^2(x-2y) = 3x^2 \cdot x - x \cdot 2y = 3x^3 - 2xy$$

$$3. (x+y^2)(2xy) = x \cdot 2xy + y^2 \cdot 2xy = 2x^2y + 2xy^3$$

ตัวอย่าง จงหาผลคูณของพหุนามต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 1. (x+1)(x-2) &= x(x-2) + (1)(x-2) = x \cdot x - x \cdot 2 + 1 \cdot x + 1 \cdot (-2) \\
 &= x^2 - 2x + x + (-2) = x^2 + (-2+1)x - 2 \\
 &= x^2 - x - 2 \\
 2. (x+y)(a+b) &= x(a+b) + y(a+b) = x \cdot a + x \cdot b + y \cdot a + y \cdot b \\
 &= ax + bx + ay + by \\
 3. (x+y)(s+r-t) &= x(s+r-t) + y(s+r-t) \\
 &= sx + rx - tx + sy + ry - ty \\
 4. (x-3y)(x+2y-z) &= x(x+2y-z) - 3y(x+2y-z) \\
 &= x \cdot x + x \cdot 2y + x \cdot (-z) - 3y \cdot x - 3y \cdot 2y - 3y \cdot (-z) \\
 &= x^2 + 2xy - xz - 3xy - 6y^2 + 3yz \\
 &= x^2 + 2xy - 3xy - xz - 6y^2 + 3yz \\
 &= x^2 - 6y^2 + (2-3)xy - xz + 3yz \\
 &= x^2 - 6y^2 - xy - xz + 3yz
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด จงหาผลคูณของพหุนามต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 1. (x+3)(x-1) \\
 2. (x^2+1)(x+3) \\
 3. x(x+4)(y-2) \\
 4. (x^3-2x+1)(x^2+4)
 \end{aligned}$$

เฉลย

$$\begin{aligned}
 1. x^2 + 2x - 3 & \qquad \qquad 2. x^3 + 3x^2 + x + 3 \\
 3. x^2y - 2x^2 + 4xy - 8x & \qquad 4. x^5 + 2x^3 - 8x + x^2 + 4
 \end{aligned}$$

การหารพหุนาม

ให้ A และ B เป็นพหุนามใดๆ โดยที่ $B \neq 0$

การหารพหุนาม A ด้วย B เขียนแทนด้วย

$$A \div B \text{ หรือ } \frac{A}{B}$$

ซึ่งมีทั้งการหารลงตัวและไม่ลงตัว(เหลือเศษ)

การหาผลคูณระหว่างพหุนามกับพหุนาม ทำได้โดยคูณแต่ละพจน์ของพหุนามหนึ่งกับทุกๆ พจน์ของอีกพหุนามหนึ่ง แล้วนำผลคูณเหล่านั้นมาบวกกัน

ตัวอย่าง จาก
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = x - 1$$

เราจะเรียกว่า พหุนาม $x^2 - 3x + 2$ หารด้วย พหุนาม $x - 2$ จะได้ผลลัพธ์ที่เรียกว่า ผลหารเท่ากับ $x - 1$

ในการหารพหุนามด้วยเอกนามให้นำตัวหารไปหารทุกพจน์ของตัวตั้ง แล้วนำผลที่ได้มาบวกกัน

ตัวอย่าง (การหารพหุนามด้วยเอกนาม)

จงหาผลหารของ

$$1. \frac{2x+4}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{4}{2} = x+2$$

$$2. \frac{3x^2-5x}{x} = \frac{3x^2}{x} - \frac{5x}{x} = 3x-5$$

$$3. \frac{3x^2y-6xy+3y}{3y} = \frac{3x^2y}{3y} - \frac{6xy}{3y} + \frac{3y}{3y} = x^2-2x+1$$

ตัวอย่าง (การหารพหุนามด้วยพหุนาม)

จงหาร $-6x+4+2x^2$ ด้วย $x-1$

วิธีทำ 1. เรียงกำลังของตัวตั้งและตัวหารจากมากไปน้อย แล้วเขียนการตั้งหารดังนี้

$$x-1 \overline{) 2x^2 - 6x + 4}$$

2. นำพจน์แรกของตัวหาร (x) ไปหารพจน์แรกของตัวตั้ง ($2x^2$) เขียนผลหาร ($2x$) ไว้บรรทัดเหนือตัวตั้ง

$$x-1 \overline{) 2x^2 - 6x + 4}$$

3. นำผลที่ได้จากข้อ 2 ($2x$) ไปคูณตัวหาร ($x-1$) ได้ ($2x^2-2x$) แล้วเขียนผลคูณไว้บรรทัดใต้ตัวตั้ง ดังนี้

$$x-1 \overline{) 2x^2 - 6x + 4}$$

$$\underline{2x^2 - 2x}$$

4. นำผลลัพธ์ที่ได้ในข้อ 3 ($2x^2 - 2x$) ไปลบออกจากตัวตั้ง ($2x^2 - 6x + 4$) ได้ $(-4x + 4)$ ดังนี้

$$x-1 \overline{) 2x^2 - 6x + 4}$$

$$\underline{2x^2 - 2x}$$

$$-4x + 4$$

5. คู่อกริยาของตัวตั้งใหม่ ($-4x + 4$) น้อยกว่าดีกรีของตัวหาร ($x - 1$) หรือยัง ถ้ายังให้ทำต่อ

6. นำพจน์แรกของตัวหาร (x) ไปหารพจน์แรกของตัวตั้งใหม่ ($-4x$) ได้ (-4) แล้วทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 3 ขั้นที่ 4 และขั้นที่ 5 จนกว่าดีกรีของตัวตั้งน้อยกว่าตัวหารดังนี้

$$x-1 \overline{) 2x^2 - 6x + 4}$$

$$\underline{2x^2 - 2x}$$

$$-4x + 4$$

$$x-1 \overline{) 2x^2 - 6x + 4}$$

$$\underline{2x^2 - 2x}$$

$$-4x + 4$$

$$\underline{\underline{-4x + 4}} \leftarrow (-4)(x-1)$$

ดังนั้น $\frac{2x^2 - 6x + 4}{x-1}$ จะได้ผลหารเท่ากับ $2x - 4$

ในการทดสอบว่าผลหารที่ได้ถูกต้องหรือไม่ ให้นำ ผลหารคูณกับตัวหาร จะได้ตัวตั้ง

$$(2x - 4)(x - 1) = 2x^2 - 6x + 4$$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าผลหารที่ได้ไม่เหลือเศษ หรือจะเรียกว่า การหารลงตัว ถ้าผลหารเหลือเศษ จะเรียกว่าการหารที่ไม่ลงตัว

พหุนาม A หารด้วย พหุนาม B จะได้ว่ามีพหุนาม C และพหุนาม D (เศษของการหาร) ที่

$$A = BC + D$$

โดยที่ดีกรีของ D น้อยกว่าดีกรีของ B และ $B \neq 0$ เรียก C ว่าผลหาร และ D ว่าเศษ

$$\text{ตัวตั้ง} = (\text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร}) + \text{เศษ}$$

ถ้าเศษเป็นศูนย์ จะเรียกว่าการหารนี้เป็นการหารลงตัว

ถ้าเศษไม่เป็นศูนย์ จะเรียกว่า การหารนี้เป็นการหารที่ไม่ลงตัว

ตัวอย่าง (การหารไม่ลงตัว)

จงหาร $x^2 - 4x + 5$ ด้วย $x + 2$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} x+2 \overline{)x^2 - 4x + 5} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -6x + 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+2 \overline{)x^2 - 4x + 5} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -6x + 5 \\ \underline{-6x - 12} \\ 17 \end{array}$$

ดังนั้น

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{x + 2} = x - 6 \text{ เหลือเศษ } 17$$

และจะเขียนได้ดังนี้

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{x + 2} = x - 6 + \frac{17}{x + 2}$$

หรือ

$$x^2 - 4x + 5 = (x + 2)(x - 6) + 17$$

ตัวอย่าง จงหาร $x^3 + 2x^2 - 1$ ด้วย $x + 1$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} x+1 \overline{)x^3 + 2x^2 + 0x - 1} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ x^2 + 0x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+1 \overline{)x^3 + 2x^2 + 0x - 1} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ x^2 + 0x \\ \underline{x^2 + x} \\ -x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x - 1 \\
 x+1 \overline{) x^3 + 2x^2 + 0x - 1} \\
 \underline{x^3 + x^2} \\
 x^2 + 0x \\
 \underline{x^2 + x} \\
 -x - 1 \\
 \underline{-x - 1} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

ดังนั้น
$$\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x+1} = x^2 + x - 1$$

แบบฝึกหัด จงหาผลหารของพหุนามต่อไปนี้

1. $(x^2 - 3x - 4) \div (x+1)$
2. $(x^3 - 2x^2 - 11x + 12) \div (x-4)$
3. $(x^3 + 6x^2 + 3x - 10) \div (x^2 + x - 2)$
4. $(x^3 - x^2 + 5x - 5) \div (x+1)$
5. $(x^4 + 2x^2 - 5) \div (x^2 + 3) \quad x-4$

เฉลย

1. $x - 4$
2. $x^2 + 2x - 3$
3. $x + 5$
4. $x^2 - 2x + 7 - \frac{12}{x+1}$
5. $x^2 - 1 - \frac{2}{x^2+3}$

ข้อมูลอ้างอิง

หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ค๑๑๑ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) จัดทำโดย สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

โปรแกรม

Maple 8

ผู้จัดทำ

วิรัตน์ ศิริมังคลานุรักษ์